## 磨尖课01 抽象函数

不给出具体解析式，只给出函数的特殊条件或特征的函数称为抽象函数，一般用的形式表示.抽象函数问题可以全面考查函数的概念和性质，将函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、图象集于一身，是考查函数的良好载体.下面对高中常见的初等函数与其对应的抽象函数依次总结.

**一次函数**

1.对于正比例函数，其对应的抽象函数为.

2.对于一次函数，其对应的抽象函数为.

**二次函数**

3.对于二次函数，其对应的抽象函数为.幂函数

4.对于幂函数，其对应的抽象函数为或.指数函数

5.对于指数函数且，其对应的抽象函数为或.对数函数

6.对于对数函数且，其对应的抽象函数为或或.

**三角函数**

7.对于正弦函数，其对应的抽象函数为.

8.对于余弦型函数，其对应的抽象函数为.

9.对于正切函数，其对应的抽象函数为.

### 磨尖点一 抽象函数求值

典例1 （一题多解）已知函数的定义域为，且,，则( A ).

A. B. C. 0 D. 1

[解析]（法一：赋值法）因为，令，可得，所以，令，可得，即，所以函数为偶函数，令，得，

即，从而可知，，故，即，所以函数的一个周期为6.

因为，，，，，所以.

因为22除以6得到的余数为4，所以.故选.

（法二：原函数法），设，因为，可取，所以，

所以的一个周期为6，且,,,,,，则，

所以，故选.



对于抽象函数的求值，常常利用恰当的赋值解答问题，在赋值时要注意观察变量与所求问题之间的关系，把满足条件的特殊值赋给函数中的某个变量，这是解决抽象函数求值问题的常用策略.当然，也可以通过找对应的初等函数，达到快速解题的效果.

#### 磨尖训练

1. （一题多解）设函数的定义域为，，若，则.

[解析]（法一：赋值法）令,，则，令，则，所以，解得，再令，，所以.

（法二：原函数法）由函数的定义域为，且，设函数且，由，解得，所以，则.

2. （一题多解）已知定义在上的函数满足，且，则7.

[解析]（法一：赋值法）令，则，再令，则.

（法二：原函数法）由，设，由，解得，所以，则.

### 磨尖点二 抽象函数的性质

典例2 [2023·新高考Ⅰ卷]（一题多解）（多选题）已知函数的定义域为，，则( ABC ).

A. B.

C. 是偶函数 D. 0为的极小值点

[解析]（法一：赋值法）.

对于，令，则，故正确.

对于，令，则，则，故正确.

对于，令，则，则，令,则，又函数的定义域为，所以为偶函数，故正确.对于，不妨令，显然符合题设条件，此时无极值，故错误.故选.

（法二：原函数法）因为，当时，对两边同时除以，得，所以设，则

对于，，故正确.

对于，，故正确.

对于，因为函数的定义域为，且的图象关于轴对称，所以为偶函数，故正确.

对于，当时，，则，令，得，令，得，故在上单调递减，在上单调递增，因为为偶函数，所以在上单调递增，在 上单调递减，显然此时0是的极大值点，故错误.故选.



对于抽象函数的性质的证明及综合问题，一般需要紧扣题干条件，反复赋值找到与,与的关系.特别注意，在证明单调性时，常构造或,并结合题干条件以及单调性的定义进行证明.此外，也可以找到对应的初等函数进行求解，一般适用于选择题、填空题，但不适用于解答题.

#### 磨尖训练

1. [2024·广州校考]（一题多解）（多选题）已知定义在上的函数满足，当时，，则函数满足( ABD ).

A. B. 是奇函数

C. 在上的最大值为 D. 的解集为

[解析]（法一：赋值法）令，则，故，正确；

令，则，即，故函数为奇函数，正确；

设，则，由题意可得，即，即，故函数为上的减函数，所以在上的最大值为，错误；

等价于，因为为上的减函数，所以，解得，即的解集为，正确.故选.

（法二：原函数法）定义在上的函数满足，当时，，不妨设，则由正比例函数的性质，选项，，显然正确，选项错误.故选.

2. （一题多解）已知定义域为的函数满足对任意，，都有.

（1）求证：是偶函数.

（2）设当时,.

①求证：在上是减函数.

②求不等式的解集.

[解析]（法一：赋值法）（1）取，得，即，

取，得，即，

取，，得，即是偶函数.

（2）①设，则，由当时，，得，则，即在上是减函数.

②由是偶函数且在上是减函数，

得不等式等价为，

即得

解得即或或，故原不等式的解集为或或.

（法二:原函数法）（1）由题意，不妨设,且,

因为，所以是偶函数.

（2）因为当时，，即，

所以.

①由对数函数的性质可知，在上是减函数.

②同法一.